ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCLI

1954

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

ESTRATTO

dal vol. XVII, 2° sem., fasc. 1-2 - Ferie 1954 (Luglio-agosto)

ROMA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1954

Dai « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei »
(Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)
serie VIII, vol. XVII, fasc. 1-2 - Ferie 1954

Geometria differenziale. — *Caratterizzazione integrale di certe superfici immerse in varietà riemanniane tridimensionali.* Nota [*] di CARLO FELICE MANARA, presentata dal Corrisp. B. FINZI.

1. Nel presente lavoro si dà una caratterizzazione integrale di una classe di superfici immerse in varietà riemanniane tridimensionali, classe che comprende i piani e le sfere dello spazio euclideo, i piani, le sfere, le orisfere e le ipersfere dello spazio della geometria non euclidea.

Per il caso dello spazio euclideo l'argomento ha formato oggetto delle ricerche di varii Autori, tra i quali ricordiamo W. Scherrer [1], H. Geppert [2], A. Signorini [3], B. Segre [4], D. Gallarati [5], P. Scherk [6].

Nel presente lavoro si riconosce che, detto T un certo invariante legato ai punti di una curva, che si riduce alla torsione di questa se la varietà di immersione si riduce allo spazio euclideo, la condizione che sia $\oint T\, ds = 0$ per qualunque curva chiusa tracciata su una superficie Σ caratterizza le superfici aventi linee di curvatura indeterminate.

2. Siano y^1, y^2, y^3 le coordinate di un punto in una varietà riemanniana tridimensionale V_3 e sia

$$ds^2 = g_{ik}\, dy^i\, dy^k \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{1}$$

$$g_{ik} = g_{ki}$$

la metrica (definita positiva) di V_3.

Fissata una curva in V_3, assegnando le coordinate y^i in funzione dell'arco s, mediante le equazioni

$$y^i = y^i(s) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 13 luglio 1954.

(1) « Vierteljahrsschrift der naturforsch. Ges. Zürich », *85* (1940). « Beiblatt », n. 32, pp. 40-46.

(2) « Annali di Mat. » (20), 56 (1941).

(3) Ibid. (20), 211 (1941).

(4) « Rend. Lincei » (83), *3*, 420-422 (1947₂).

(5) Ibid. (8), *13*, 238-241 (1952).

(6) « Boll. U.M.I. », (3), *9*, 38-40 (1954).

è noto che le tre quantità

$$\lambda^i = \frac{dy^i}{ds} \tag{2}$$

dànno le componenti controvarianti del versore tangente alla Γ, avendosi

$$\lambda^i \lambda_i = 1. \tag{3}$$

Poniamo ora

$$\mu^i = \lambda^i_{/k} \lambda^k \tag{4}$$

$$c^2 = \frac{1}{\rho^2} = \mu^i \mu_i . \tag{5}$$

Le tre quantità

$$\nu^i = \rho \mu^i$$

forniscono le componenti del versore normale principale alla curva, avendosi

$$\nu^i \lambda_i = 0.$$

È noto che le equazioni

$$\mu^i = 0$$

caratterizzano le geodetiche di V_3 e che gli invarianti c e ρ definiti dalla (5) si riducono alla flessione ed al raggio di prima curvatura rispettivamente, quando V_3 sia uno spazio euclideo.

Infine le funzioni

$$\beta^i = \varepsilon^i_{pq} \lambda^p \nu^q \text{ (7)}$$

dànno le componenti controvarianti del vettore binormale alla Γ, e si ha inoltre

$$\beta^i_{/k} \lambda^k = T \nu^i$$

essendo T un invariante che si riduce alla torsione della curva se V_3 si riduce ad uno spazio euclideo.

Si verifica facilmente che si ha

$$T = - \rho^2 \varepsilon_{ikm} \lambda^i \mu^k \mu^m_{/p} \lambda^p, \tag{6}$$

formula che, quando V_3 si riduce ad uno spazio euclideo, si riduce alla nota relazione

$$T = - \rho^2 \left(\frac{dP}{ds} \times \frac{d^2 P}{ds^2} \wedge \frac{d^3 P}{ds^3} \right).$$

3. Sia data in V_3 una superficie Σ, assegnando le coordinate y^1, y^2, y^3 di punto in V_3 come funzioni regolari di due coordinate x^1, x^2:

$$y^i = y^i (x^1, x^2). \tag{7}$$

(7) Per il significato delle notazioni tensoriali che usiamo cfr. per esempio il trattato di B. Finzi e M. Pastori, *Calcolo tensoriale ed applicazioni*, Zanichelli, Bologna.

Nel seguito indicheremo con lettere greche (α, β, γ, ρ, $\sigma \cdots$) degli indici che possono assumere soltanto i valori 1 e 2, riservando le lettere latine (i, k, m, n, p, q, r, $\cdots$) per gli indici che possono assumere i valori 1, 2, 3. Porremo inoltre brevemente

$$\frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} = y^i_\alpha .$$

In forza delle (7) si ha

$$dy^i = y^i_\alpha \, dx^\alpha \tag{8}$$

e la metrica (1) della V_3 subordina sulla Σ una metrica bidimensionale

$$ds^2 = a_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \, dx^\beta \tag{9}$$

avendosi

$$a_{\alpha\beta} = g_{ik} \, y^i_\alpha \, y^k_\beta .$$

Come è ovvio, le y^i_α calcolate per una stessa coppia di valori $x^1 = x^1_0$, $x^2 = x^2_0$ forniscono le componenti di due vettori tangenti alla superficie Σ nel punto P_0 corrispondente ai valori $x^1 = x^1_0$, $x^2 = x^2_0$ delle coordinate superficiali.

Indichiamo con N^i le componenti del versore normale alla superficie nello stesso punto; si ha allora

$$N^i N_i = 1 \tag{10}$$

$$N_i \, y^i_\alpha = 0. \tag{11}$$

Le N^i e le loro derivate sono legate alle y^i_α ed alle loro derivate dalle note formule fondamentali [8]

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \overline{\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}} y^i_\gamma + b_{\alpha\beta} N^i - \left\{ {i \atop rk} \right\} y^r_\alpha \, y^k_\beta \tag{12}$$

$$\frac{\partial N^i}{\partial x^\alpha} = - b^\gamma_\alpha \, y^i_\gamma - N^k \, y^r_\alpha \left\{ {i \atop kr} \right\} \tag{13}$$

nelle quali $b_{\alpha\beta}$ sono le componenti del secondo tensore fondamentale della superficie ed il simbolo di Christoffel $\overline{\left\{ {\gamma \atop \alpha\beta} \right\}}$ si intende calcolato relativamente alla metrica (9) della Σ.

4. Sia ora Γ una curva sulla superficie Σ, data assegnando le coordinate superficiali x^1, x^2 in funzione dell'arco, nella forma

$$x^\alpha = x^\alpha (s) . \tag{14}$$

(8) Cfr. per esempio L. BIANCHI, *Geometria Differenziale* (3ª ed.) (Zanichelli, Bologna), vol. II, § 449.

Indichiamo con $\bar{\lambda}^\alpha$ e $\bar{\mu}^\alpha$ le quantità analoghe alle λ^α e μ^i date dalla (2) e dalla (4), calcolate rispetto alla metrica (9) della superficie, cioè poniamo

$$\bar{\lambda}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$$

$$\bar{\mu}^\alpha = \bar{\lambda}^\alpha{}_{/\beta}\,\bar{\lambda}^\beta = \frac{\partial\bar{\lambda}^\alpha}{\partial x^\beta}\,\bar{\lambda}^\beta + \bar{\lambda}^\beta\,\bar{\lambda}^\gamma \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{Bmatrix}$$

intendendo che la derivata covariante, qui e nel seguito, quando sia eseguita su tensori che portano indici greci, venga calcolata rispetto alla metrica (9) di Σ.

Si ha chiaramente, in forza delle (8)

$$\bar{\lambda}^\alpha y^i_\alpha = \lambda^i \tag{15}$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^\alpha\,\bar{\lambda}_\alpha &= 1 \\ \bar{\lambda}^\alpha\,\bar{\mu}_\alpha &= 0\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Ora le formule fondamentali (12) (13) permettono di legare le $\bar{\lambda}^\alpha$ e $\bar{\mu}^\alpha$ qui definite alle λ^i e μ^i relative alla curva, considerata immersa in V_3. A tal fine, ricordiamo che, dette u^i le componenti controvarianti di un vettore funzione dei punti della curva Γ, si ha

$$u^i{}_{/k}\,\lambda^k = \frac{du^i}{ds} + \lambda^k\,u^r \begin{Bmatrix} i \\ r\,k \end{Bmatrix}$$

e quindi in particolare, se Γ è tracciata sulla Σ,

$$u^i{}_{/k}\,\lambda^k = \frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}\,\bar{\lambda}^\alpha + \lambda^k\,u^r \begin{Bmatrix} i \\ r\,k \end{Bmatrix}. \tag{17}$$

Applicando la (17) al vettore di componenti λ^i si ha, ricordando la (15),

$$\lambda^i{}_{/k}\,\lambda^k = \frac{\partial\lambda^i}{\partial x^\alpha}\,\bar{\lambda}^\alpha + \lambda^k\,\lambda^r \begin{Bmatrix} i \\ rk \end{Bmatrix} = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^\alpha\,\partial x^\beta}\,\bar{\lambda}^\alpha\,\bar{\lambda}^\beta + y^i_\gamma\,\frac{\partial\bar{\lambda}^\gamma}{\partial x^\alpha}\,\bar{\lambda}^\alpha + \lambda^k\,\lambda^r \begin{Bmatrix} i \\ kr \end{Bmatrix},$$

ossia, applicando la formula fondamentale (12),

$$\begin{aligned} \lambda^i{}_{/k}\,\lambda^k = \bar{\lambda}^\alpha\,\bar{\lambda}^\beta \left[\begin{Bmatrix} \gamma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} y^i_\gamma + b_{\alpha\beta}\,N^i - \begin{Bmatrix} i \\ rk \end{Bmatrix} y^r_\alpha\,y^k_\beta \right] + \\ + y^i_\gamma\,\frac{\partial\bar{\lambda}^\gamma}{\partial x^\alpha}\,\bar{\lambda}^\alpha + \lambda^k\,\lambda^r \begin{Bmatrix} i \\ kr \end{Bmatrix} = y^i_\gamma\,\bar{\lambda}^\gamma{}_{/\alpha}\,\bar{\lambda}^\alpha + \bar{\lambda}^\alpha\,\bar{\lambda}^\beta\,b_{\alpha\beta}\,N^i\,; \end{aligned}$$

ossia in definitiva

$$\mu^i = y^i_\gamma\,\bar{\mu}^\gamma + BN^i, \tag{18}$$

essendo B l'invariante definito dalla

$$B = b_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^\alpha\,\bar{\lambda}^\beta.$$

La (18) fornisce la scomposizione del vettore di componenti μ^i nella somma di un vettore superficiale $y^i_\gamma\,\bar{\mu}^\gamma$ e di un vettore BN^i normale alla superficie. Ricordando le (10) e (11) si ha facilmente

$$\mu^i\,\mu_i = g_{ik}\,\mu^i\,\mu^k = c^2 = B^2 + G^2, \tag{19}$$

essendo

$$G^2 = a_{\alpha\beta}\,\bar{\mu}^{\alpha}\,\bar{\mu}^{\beta}\,. \tag{20}$$

Indichiamo ora con $\bar{\varepsilon}_{pq}$ le componenti del tensore ε di Ricci bidimensionale, relativo alla superficie Σ ed alla sua metrica (9). Si ha chiaramente, in forza delle (16) e (20),

$$\bar{\mu}^{\alpha} = G\,\bar{\varepsilon}^{\alpha}{}_{\beta}\,\bar{\lambda}^{\beta}\,. \tag{21}$$

Inoltre la equazione differenziale (del 1° ordine e di grado 2) delle linee di curvatura di Σ (considerata immersa in V_3) è data da

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^{\alpha}\,b^{\beta}_{\gamma}\,\bar{\lambda}^{\gamma} = 0\ ^{(8)}. \tag{22}$$

Questa stessa equazione, in forza delle (21), può esser scritta nella forma

$$b_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^{\alpha}\,\bar{\mu}^{\beta} = 0\,;$$

si ha infatti

$$b_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^{\alpha}\,\bar{\mu}^{\beta} = G\,\bar{\varepsilon}_{\varrho\sigma}\,\bar{\lambda}^{\varrho}\,b^{\sigma}_{\gamma}\,\bar{\lambda}^{\gamma}\,. \tag{23}$$

Sussistono inoltre, in base a note proprietà del tensore di Ricci, le seguenti relazioni, cui faremo ricorso in seguito

$$G = \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^{\alpha}\,\bar{\mu}^{\beta} \tag{24}$$

$$\frac{dG}{ds} = G_{/\sigma}\,\bar{\lambda}^{\sigma} = \bar{\varepsilon}_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^{\alpha}\,\bar{\mu}^{\beta}{}_{/\sigma}\,\bar{\lambda}^{\sigma}. \tag{25}$$

5. Applichiamo ora al calcolo del vettore $\mu^{i}{}_{/k}\,\lambda^{k}$ un procedimento analogo a quello usato nel precedente paragrafo per il calcolo di $\lambda^{i}{}_{/k}\,\lambda^{k}$. Ricordando la (17) ed in forza delle formule fondamentali (12) e (13) si ottiene, con calcoli analoghi a quelli eseguiti nel precedente paragrafo per giungere alla formula (18),

$$\mu^{i}{}_{/k}\,\lambda^{k} = y^{i}_{\gamma}\,[\,\bar{\mu}^{\gamma}{}_{/\alpha}\,\bar{\lambda}^{\alpha} - B\,b^{\gamma}_{\alpha}\,\bar{\lambda}^{\alpha}] + N^{i}\left[\frac{dB}{ds} + b_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^{\alpha}\,\bar{\mu}^{\beta}\right], \tag{24}$$

formula analoga alla (18), che ci dà il vettore $\mu^{i}{}_{/k}\,\lambda^{k}$ scomposto in una parte superficiale $y^{i}_{\gamma}\,[\,\bar{\mu}^{\gamma}{}_{/\alpha}\,\bar{\lambda}_{\alpha} - B\,b^{\gamma}_{\alpha}\,\bar{\lambda}^{\alpha}]$ ed in un vettore normale $N^{i}\left[\frac{dB}{ds} + b_{\alpha\beta}\,\bar{\lambda}^{\alpha}\,\bar{\mu}^{\beta}\right]$.

Le formule (15), (18), (24) dànno le componenti dei vettori λ^{i}, μ^{i}, $\mu^{i}{}_{/k}\,\lambda^{k}$ per la curva Γ, data dalle (14), tracciata sulla Σ, e quindi permettono il calcolo dell'invariante T, legato ai punti di Γ, mediante la (6).

Per semplificare il calcolo assumiamo la metrica (1) di V_3 in forma geodetica, assumendo come linee coordinate y^3 le linee della congruenza di geodetiche normali alla superficie Σ. Pertanto in questo caso particolare la Σ viene rappresentata dalle equazioni

$$y^1 = x^1 \quad ; \quad y^2 = x^2 \quad ; \quad y^3 = 0. \tag{25}$$

Si hanno poi per le componenti del tensore fondamentale le relazioni

$$g_{13} = g_{23} = 0 \quad , \quad g_{33} = 1, \tag{26}$$

e per il tensore fondamentale della metrica (9) le relazioni

$$a_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\,(y^1\,,y^2\,,0). \tag{27}$$

Come conseguenze facili delle (25) e (26) si hanno le

$$y^i_\alpha = g^i_\alpha$$
$$N^i = g^i_3$$

e di conseguenza le (15) (18) (24) assumono rispettivamente le forme

$$\lambda^i = g^i_\alpha\,\bar\lambda^\alpha \tag{15$'$}$$

$$\mu^r = g^r_\beta\,\bar\mu^\beta + g^r_3\,B \tag{18$'$}$$

$$\mu^k{}_{/p}\,\lambda^p = g^k_\gamma\,[\bar\mu^\gamma{}_{/\beta}\,\bar\lambda^\beta - B b^\gamma_\beta\,\bar\lambda^\beta] + g^k_3\left[\frac{dB}{ds} + b_{\alpha\beta}\,\bar\lambda^\alpha\,\bar\mu^\beta\right]. \tag{24$'$}$$

Pertanto la (6) assume, per note proprietà del tensore di Ricci, la forma

$$-c^2\,T = \varepsilon_{\alpha 3\gamma}\,B\,[\bar\lambda^\alpha\bar\mu^\gamma{}_{/\beta}\,\bar\lambda^\beta - B b^\gamma_\beta\;\bar\lambda^\beta\;\bar\lambda^\alpha] + \varepsilon_{\alpha\beta 3}\left[\bar\lambda^\alpha\,\bar\mu^\beta\,\frac{dB}{ds} + \bar\lambda^\alpha\,\mu^\beta\,b_{\varrho\sigma}\,\bar\lambda^\varrho\,\bar\mu^\sigma\right].$$

Osserviamo ora che, nel sistema di riferimento che abbiamo adottato, in forza delle (26) e (27) le componenti $\varepsilon_{\alpha\beta 3}$ del tensore di Ricci coincidono con le componenti $\bar\varepsilon_{\alpha\beta}$ del tensore di Ricci bidimensionale, calcolato in relazione alla metrica di Σ.

Abbiamo quindi

$$-c^2\,T = \bar\varepsilon_{\alpha\beta}\left[-B\bar\lambda^\alpha\,\bar\mu^\beta{}_{/\gamma}\,\lambda^\gamma + B^2\,\bar\lambda^\alpha\,b^\beta_\gamma\,\bar\lambda^\gamma + \bar\lambda^\alpha\,\mu^\beta\,\frac{dB}{ds} + \bar\lambda^\alpha\,\bar\mu^\beta\,b_{\varrho\sigma}\,\bar\lambda^\varrho\,\bar\mu^\sigma\right]$$

e quindi, ricordando le (19), (24), (25),

$$-(B^2 + G^2)\,T = -B\,\frac{dG}{ds} + G\,\frac{dB}{ds} + \bar\varepsilon_{\alpha\beta}\,[B^2\,\bar\lambda^\alpha\,b^\beta_\gamma\,\bar\lambda^\gamma + \bar\lambda^\alpha\,\bar\mu^\beta\,b_{\varrho\sigma}\,\lambda^\varrho\,\mu^\sigma],$$

e in definitiva

$$T\,ds = d\,\mathrm{arctg}\,G/B + \bar\varepsilon_{\beta\alpha}\,[B^2\,\bar\lambda^\alpha\,b^\beta_\gamma\,\bar\lambda^\gamma + \bar\lambda^\alpha\,\bar\mu^\beta\,b_{\varrho\sigma}\,\bar\lambda^\varrho\,\bar\mu^\sigma]\,ds$$

ossia, ricordando le (23) e (24),

$$T\,ds = d\,\mathrm{arctg}\,G/B - (B^2 + G^2)\,(\bar\varepsilon_{\alpha\beta}\,\bar\lambda^\alpha\,b^\beta_\gamma\,\bar\lambda^\gamma)\,ds \tag{29}$$

6. La formula (29) a cui siam giunti alla fine del precedente paragrafo ci permette di enunciare il seguente

TEOREMA. – *Condizione necessaria e sufficiente perché l'integrale curvilineo*

$$\oint T\,ds$$

calcolato lungo una qualunque linea chiusa tracciata su una superficie Σ sia nullo è che ogni linea di Σ sia linea di curvatura.

La dimostrazione è immediata solo che si osservi che la (29) scompone l'elemento differenziale $T\,ds$ nella somma di due addendi; l'addendo d arctg G/B dà contributo nullo se integrato lungo una qualunque linea chiusa della superficie, perché non esistono su Σ dei punti nei quali sia contemporaneamente $B = G = 0$ e ciò in base alla (20). L'altro addendo è identicamente nullo lungo le linee di curvatura, in base alla (22).

Poniamo ora che V_3 sia in particolare uno spazio tridimensionale a curvatura costante S_3. Rappresentato S_3 con il classico modello proiettivo dato da uno spazio lineare in cui è assegnata una quadrica assoluto $Q = 0$, chiamiamo sfere (generalizzate) di S_3 le superfici che appartengono ai fasci definiti dalla quadrica assoluto e da un piano generico contato due volte. Si verifica facilmente che tali sfere in S_3 sono caratterizzate dall'avere le linee di curvatura indeterminate e ciò ricorrendo ad una delle classiche forme a cui si può ridurre la metrica di S_3. Si ha quindi immediatamente il

COROLLARIO. – *La condizione*

$$\oint T\,ds = 0$$

per qualunque linea della superficie caratterizza le sfere di uno spazio a curvatura costante.

Roma, 1954. – Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

ABBONAMENTI

Il prezzo dell'abbonamento per i Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche Matematiche e Naturali per l'anno 1954 è il seguente:

Italia: **L. 12.000** — Estero: **L. 13.000**

Gli abbonati possono chiedere l'invio raccomandato dietro aggiunta di lire 350 per l'Italia e di L. 700 per l'Estero.

Per i singoli fascicoli e per le annate arretrate, rivolgersi all'Accademia Nazionale dei Lincei - Ufficio Pubblicazioni - Via della Lungara, 10 - Roma - Tel. 52-425.

R. Morghen, *Cancelliere dell'Accademia, Direttore responsabile.*

Autorizzazione del Tribunale di Roma n. 2113 del 24-4-1951.
Spedizione in Abbonamento Postale Gruppo III.